

Çalışma Soruları- Hafta 2

1. \mathbb{R}^n uzayının cebirsel yapısı

Not: İşaretli sorular (*) uygulama saatinde çözülecektir.

1. (*)

- $z = x$ düzleminde olan ve $(1, -1, 0)$ vektörüne dik olan sıfırdan farklı tüm vektörleri bulunuz.
- Bileşenlerinin toplamı dört olan ve $(3, 2, -5)$ vektörüne dik olan sıfırdan farklı tüm vektörleri bulunuz.
- $(1, 0, 1)$ noktasını içeren ve normali $(-1, 2, 1)$ olan düzlemin denklemini bulunuz.
- $(-1, 1, 1)$ noktasından geçen ve $3x + 2y - 5z = 0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

2.

a) (*) $a, b \in \mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı vektörler ise,

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) = ua + bv \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in [0, 1]\}$$

paralelkenarının alanının $\|a \times b\|$ olduğunu ispatlayınız.

b) $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı vektörler ise

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) = ta + ub + vc \in \mathbb{R}^3 \mid t, u, v \in [0, 1]\}$$

dörtüzlüsünün hacminin $|(a \times b) \cdot c|$ olduğunu kanıtlayınız.

3. (*) X bir Öklidyen uzay, B bu uzayın doğal tabanı ve S, B kümesinin kendisine eşit olmayan boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$T(x) = \sum_{v \in B \setminus S} (x \cdot v)v$$

olarak tanımlansın. $\text{Ker}T = \text{span}(S)$ olduğunu gösteriniz.

4. Bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

olsun.

- Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için, $\|B(x, y)\| = \|(x, y)\|$ olduğunu ispatlayınız.
- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sıfırdan farklı bir vektör ve $B(x, y)$ ve (x, y) vektörleri arasındaki açı φ ise $\cos \varphi = \cos \theta$ olduğunu kanıtlayınız. Buna dayanarak B matrisinin \mathbb{R}^2 vektörleri üzerindeki etkisini açıklayınız.

5. \mathbb{R}^3 içinde, doğrusal olmayan ve bir Π düzlemi tarafından içerilen üç nokta $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ ve $c = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Π düzleminin denkleminin

$$\det \begin{bmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{bmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

6. \mathbb{R}^n 'de aşağıdaki ifadelerin gerçekleştiğini gösteriniz.

a) (*) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$

b) $\|x - y\|\|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

c) $4(x \cdot y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

7. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ olsun. n üzerinden tümevarım yöntemiyle aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını ispatlayınız

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\|.$$

8. (*) \mathbb{R}^3 içerisinde sıfırdan farklı a ve b vektörleri alındığında

$$v = \|a\|b + \|b\|a$$

şeklinde tanımlanan v vektörünün a ve b vektörleri arasında kalan açığı ortaladığını gösteriniz.

9. $\|a\|b + \|b\|a$ ve $\|b\|a - \|a\|b$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

10. Aşağıdaki özellikleri sağlayan birim vektörleri bulunuz:

a) (*) $x = 3t + 1$, $y = 16t - 2$ ve $z = -t - 2$ doğrusuna paralel olan

b) (*) $8x + y + z = 1$ ve $x - y - z = 0$ düzlemlerine paralel olan

c) $i - j$ vektörüne ve $x = 2t - 1$, $y = -t - 1$, $z = t + 2$ doğrusuna aynı anda dik olan

d) $x - 6y + z = 12$ düzlemine dik olan.